با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی (۱) پایه دهم
فصل چهارم

عنوان فصل: معادله‌ها و نامعادله‌ها

از صفحه‌ی ۶۹ تا صفحه‌ی ۹۳ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل معادله‌ها و نامعادله‌ها آمده است.

مباحث فصل: معادلهٔ درجهٔ دوم و روش‌های حل آن، سهمی، تعیین علامت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۷۰ · پرسش درون متن — قائم‌الزاویه بودن مثلث با اضلاع ۳، ۴ و ۵ ... ۵

۲ صفحه ۷۱ · فعالیت — حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه ... ۵

۳ صفحه ۷۱ · کار در کلاس — حل معادله به روش تجزیه ... ۶

۴ صفحه ۷۲ · فعالیت — حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری ... ۶

۵ صفحه ۷۲ · مثال — جعبه‌ای با حجم ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب ... ۷

۶ صفحه ۷۳ · کار در کلاس — حل معادله به روش ریشه‌گیری ... ۷

۷ صفحه ۷۳ · فعالیت — حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل ... ۷

۸ صفحه ۷۳ · مثال — حل معادلهٔ $x^2 - 6x + 4 = 0$ به روش مربع کامل ... ۸

۹ صفحه ۷۴ · کار در کلاس — حل معادله به روش مربع کامل ... ۸

۱۰ صفحه ۷۴ · فعالیت — به‌دست آوردن فرمول کلی حل معادلهٔ درجه دوم ... ۹

۱۱ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — تکمیل جمع‌بندی حالت‌های Δ ... ۱۰

۱۲ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — حل معادله با فرمول کلی ۱۰

۱۳ صفحه ۷۶ · تمرین — حل معادله به کمک تجزیه ۱۱

۱۴ صفحه ۷۶ · تمرین — حل معادله به کمک ریشه‌گیری ۱۱

۱۵ صفحه ۷۶ · تمرین — حل معادله به روش مربع کامل ... ۱۱

۱۶ صفحه ۷۷ · تمرین — حل معادله با فرمول کلی ۱۲

۱۷ صفحه ۷۷ · تمرین — حل معادله به روش دلخواه ۱۲

۱۸ صفحه ۷۷ · تمرین — مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ... ۱۳

۱۹ صفحه ۷۷ · تمرین — ابعاد مستطیل ۱۳

۲۰ صفحه ۷۷ · تمرین — سن دو برادر ۱۳

۲۱ صفحه ۷۷ · تمرین — قاب عکس ۱۴

۲۲ صفحه ۷۷ · تمرین — تعداد تیم‌های تیمگان والیبال ۱۴

۲۳ صفحه ۷۷ · تمرین — فشار خون نرمال ۱۴

۲۴ صفحه ۷۸ · فعالیت — نمودار $y = x^2 - 4$ و اجزای سهمی ... ۱۵

۲۵ صفحه ۷۹ · فعالیت — رسم سهمی $y = x^2 - 4x + 5$ ۱۵

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — رأس و رسم سهمی ۱۶

۲۷ صفحه ۸۰ · فعالیت — مختصات رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ... ۱۶

۲۸ صفحه ۸۱ · فعالیت — مقایسهٔ دو سهمی با رأس مشترک ... ۱۷

۲۹ صفحه ۸۱ · تمرین — رسم نمودار سهمی‌ها ۱۷

۳۰ صفحه ۸۱ · تمرین — خط تقارن سهمی از دو نقطه ۱۸

۳۱ صفحه ۸۱ · تمرین — نوشتن معادلهٔ سهمی از روی نقاط ... ۱۸

۳۲ صفحه ۸۱ · تمرین — مسیر پرتاب دو وزنه ۱۸

۳۳ صفحه ۸۳ · فعالیت — تعیین علامت خط $y = 2x - 6$ ۱۹

۳۴ صفحه ۸۴ · فعالیت — تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اول ... ۱۹

۳۵ صفحه ۸۴ · مثال — بررسی علامت $y = 5x - 2$ ۲۰

۳۶ صفحه ۸۵ · مثال — بررسی علامت $A = (2x - 1)(3 - x)$ ... ۲۰

۳۷ صفحه ۸۵ · کار در کلاس — تعیین علامت عبارت‌ها ۲۱

۳۸ صفحه ۸۶ · فعالیت — تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم ... ۲۲

۳۹ صفحه ۸۸ · کار در کلاس — تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوم ... ۲۳

۴۰ صفحه ۸۹ · فعالیت — نامعادلهٔ دوگانه ۲۳

۴۱ صفحه ۹۰ · کار در کلاس — تبدیل دما از سانتی‌گراد به فارنهایت ... ۲۴

۴۲ صفحه ۹۰ · فعالیت — حل نامعادلهٔ درجه دوم به کمک نمودار و جدول ... ۲۵

۴۳ صفحه ۹۰ · کار در کلاس — حل نامعادلهٔ درجه دوم به دو روش ... ۲۵

۴۴ صفحه ۹۱ · فعالیت — نامعادلهٔ قدر مطلقی $|x| \geq 3$ و $|x| \leq 3$ ... ۲۶

۴۵ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — حل نامعادلهٔ قدر مطلقی ۲۶

۴۶ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — نوشتن نامعادلهٔ قدر مطلقی برای بازهٔ (۱، ۹) ... ۲۷

۴۷ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — نوشتن نامعادلهٔ قدر مطلقی برای اجتماع دو بازه ... ۲۷

۴۸ صفحه ۹۳ · تمرین — نوشتن مجموعه جواب نامعادله‌ها به شکل بازه ... ۲۷

۴۹ صفحه ۹۳ · تمرین — همواره مثبت بودن عبارت درجه دوم ... ۲۸

۵۰ صفحه ۹۳ · تمرین — سهمی همواره پایین محور xها ۲۸

۵۱ صفحه ۹۳ · تمرین — ارتفاع جسم پرتاب‌شده از بالای ساختمان ... ۲۹

۵۲ صفحه ۹۳ · تمرین — ضربان قلب پس از کار سنگین بدنی ... ۲۹

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۷۰ پرسش درون متن

اضلاع مثلث، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم‌الزاویه است (چرا؟).

طبق عکس قضیهٔ فیثاغورس، اگر در مثلثی مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است. در اینجا:

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ = ۵^۲$$

پس مثلثی با اضلاع ۳، ۴ و ۵ قائم‌الزاویه است و ضلع ۵ وتر آن است.

همچنین اگر کوچک‌ترین ضلع x و دو ضلع دیگر x+۱ و x+۲ باشند، از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$x^۲ + (x+۱)^۲ = (x+۲)^۲ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲x + ۱ = x^۲ + ۴x + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$$

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۲ صفحه ۷۱ فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، درنظر بگیرید.

۱ با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید. $(x + ۱)(x - \ldots) = ۰$

۲ از ویژگی حاصل‌ضرب صفر استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. $(x+۱)(x-\ldots) = ۰ \Rightarrow$ $x+۱=۰ \Rightarrow x = -۱$ یا $x-\ldots=۰ \Rightarrow x = \ldots$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل‌شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست‌آمده را در معادله قرار دهیم و آن‌ها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً دربارهٔ آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

۱) سه‌جمله‌ای $x^۲ - ۲x - ۳$ را به‌صورت حاصل‌ضرب دو عامل می‌نویسیم؛ دو عدد با حاصل‌ضرب ۳- و مجموع ۲- یعنی ۱ و ۳- را می‌یابیم:

$$(x + ۱)(x - ۳) = ۰$$

پس جای خالی عدد **۳** است.

۲) طبق ویژگی حاصل‌ضرب صفر:

$$(x + ۱)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \text{ یا } x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

آزمایش جواب $x = ۳$:

$۳^۲ - ۲(۳) - ۳ = ۹ - ۶ - ۳ = ۰$ ✓

پاسخ به پرسش آخر: خیر؛ طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد، پس $x = -۱$ قابل قبول نیست. فقط $x = ۳$ پذیرفته است که اضلاع ۳، ۴ و ۵ را می‌دهد.

---

۳ صفحه ۷۱ — کار در کلاس

معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^۲ - ۳x = ۱۰$ **ب)** $۳t^۲ - t = ۰$

الف) ابتدا همه جمله‌ها را به یک طرف می‌بریم:

$x^۲ - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۵$ یا $x = -۲$

آزمایش: $۵^۲ - ۳(۵) = ۲۵ - ۱۵ = ۱۰$ ✓ و $(-۲)^۲ - ۳(-۲) = ۴ + ۶ = ۱۰$ ✓

ب) با فاکتورگیری از t:

$t(۳t - ۱) = ۰ \Rightarrow t = ۰$ یا $t = \frac{۱}{۳}$

آزمایش: $۳(۰)^۲ - ۰ = ۰$ ✓ و $۳\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۰$ ✓

---

۴ صفحه ۷۲ — فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^۲ = ۲۵$ را درنظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به‌دست آورید.

۲ ریشه‌های دوم عدد ۲۵ را به‌دست آورید و آن‌ها را با جواب‌های حاصل از تجزیه مقایسه کنید.

۳ اگر $x^۲ = a$ یک معادلهٔ درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به‌صورت $x = \pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

۱) $x^۲ - ۲۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)(x + ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$ یا $x = -۵$ ($x^۲ = ۲۵$)

۲) ریشه‌های دوم ۲۵ دو عدد ۵ و ۵- هستند (چون $۵^۲ = (-۵)^۲ = ۲۵$)؛ این‌ها دقیقاً همان جواب‌های روش تجزیه‌اند.

۳) خیر، همیشه نمی‌توان. اگر a منفی باشد، چون مربع هر عدد حقیقی نامنفی است، معادله جواب حقیقی ندارد و $\sqrt{a}$ تعریف نشده است. اگر $a \geq ۰$ باشد، جواب‌ها $x = \pm\sqrt{a}$ هستند (برای $a = ۰$ فقط $x = ۰$).

۵ صفحه ۷۲ مثال

از صفحهٔ مقوایی به شکل مربع، چهار مربع کوچک به ضلع ۲ سانتی‌متر در گوشه‌ها جدا می‌کنیم و با تا زدن لبه‌ها جعبه می‌سازیم. اگر حجم جعبه ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول ضلع مقوای اولیه را به‌دست آورید. (جاهای خالی حل مثال را کامل کنید.)

حجم جعبه = طول × عرض × ارتفاع = (x)(x)(۲) = ... ⇒ ... = x ⇒ x^2 = ... = ۲۰۰ ...

اگر ضلع کف جعبه x باشد، ارتفاع جعبه ۲ است، پس:

$x \times x \times ۲ = ۲x^۲$

حجم باید ۲۰۰ باشد:

$۲x^۲ = ۲۰۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow x = \pm ۱۰$

چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها x = ۱۰ قبول است. ضلع مربع اولیه از دو بریدگی ۲ سانتی‌متری در دو طرف و ضلع کف جعبه تشکیل شده است:

$x + ۲ + ۲ = ۱۰ + ۴ = ۱۴$

طول ضلع مقوای اولیه **۱۴ سانتی‌متر** است. (آزمایش: $۱۰ \times ۱۰ \times ۲ = ۲۰۰$)

۶ صفحه ۷۳ کار در کلاس

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود، به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $۵x^۲ = ۲۰$ **ب)** $۵x^۲ + ۷ = ۰$ **پ)** $(r - ۲)^۲ = ۱۶$

الف) $۵x^۲ = ۲۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$

ب) $x^۲ = -\frac{۷}{۵}$؛ $۵x^۲ + ۷ = ۰ \Rightarrow$ مربع هیچ عدد حقیقی منفی نیست، پس معادله **جواب حقیقی ندارد**.

پ) $(r - ۲)^۲ = ۱۶ \Rightarrow r - ۲ = \pm ۴ \Rightarrow r = ۶$ یا $r = -۲$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۷ صفحه ۷۳ فعالیت

۱ دو جمله‌ای $x^۲ + ۶x$ را درنظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چندجمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید: $x^۲ + ۶x + ... = (x + ...)^۲$. اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای $x^۲ + ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ $x^2 + ax + \ldots = (x + \ldots)^2$

۱) برای مربع کامل شدن باید «مربع نصف ضریب x» را اضافه کنیم؛ نصف ۶ برابر ۳ و مربع آن ۹ است:

$$x^۲ + ۶x + ۹ = (x + ۳)^۲$$

ارتباط با شکل: مربعی به ضلع x و دو مستطیل $۳\times x$ را کنار هم می‌چینیم؛ برای کامل شدن مربع بزرگ‌تر به ضلع $x+۳$ باید یک مربع کوچک ۳×۳ به مساحت ۹ اضافه شود. پس عدد ۳ طول ضلع مربع کوچک و عدد ۹ مساحت آن است.

۲) نصف ضریب x برابر $\frac{a}{۲}$ است و باید مربع آن را اضافه کنیم:

$$x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴} = \left(x + \frac{a}{۲}\right)^۲$$

۸ صفحه ۷۳ — **مثال**

معادلهٔ $x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$ را به روش مربع کامل حل می‌کنیم. جاهای خالی را کامل کنید.

$$x^۲ - ۶x = -۴$$

به دو طرف معادله ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود: $x^۲ - ۶x + \ldots = -۴ + \ldots$

$$(x - ۳)^۲ = ۵$$

ابتدا ۴ را به طرف دیگر می‌بریم: $x^۲ - ۶x = -۴$.

نصف ضریب x برابر ۳- و مربع آن ۹ است؛ پس به دو طرف ۹ اضافه می‌کنیم:

$$x^۲ - ۶x + ۹ = -۴ + ۹ \Rightarrow (x - ۳)^۲ = ۵$$

از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم و ۳ را اضافه می‌کنیم:

$$x - ۳ = \pm\sqrt{۵} \Rightarrow x = ۳ \pm \sqrt{۵}$$

جاهای خالی هر دو عدد ۹ هستند.

۹ صفحه ۷۴ — **کار در کلاس**

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^۲ + ۲x = ۲۴$ **ب)** $t^۲ + ۳t = ۳$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

پ) $n^۲ - ۴n + ۵ = ۰$ **ت)** $۲r^۲ + r - ۲ = ۰$

الف) مربع نصف ضریب x یعنی ۱ را اضافه می‌کنیم:

$$x^۲ + ۲x + ۱ = ۲۴ + ۱ \Rightarrow (x + ۱)^۲ = ۲۵ \Rightarrow x + ۱ = \pm ۵ \Rightarrow x = ۴ \text{ یا } x = -۶$$

ب) نصف ضریب t برابر $\frac{۳}{۲}$ و مربع آن $\frac{۹}{۴}$ است:

$$t^۲ + ۳t + \frac{۹}{۴} = ۳ + \frac{۹}{۴} \Rightarrow \left(t + \frac{۳}{۲}\right)^۲ = \frac{۲۱}{۴} \Rightarrow t = \frac{-۳ \pm \sqrt{۲۱}}{۲}$$

پ)

$$n^۲ - ۴n = -۵ \Rightarrow n^۲ - ۴n + ۴ = -۵ + ۴ \Rightarrow (n - ۲)^۲ = -۱$$

مربع یک عدد حقیقی نمی‌تواند منفی باشد؛ پس معادله **جواب حقیقی ندارد**.

ت) ابتدا دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضریب $r^۲$ برابر ۱ شود:

$$r^۲ + \frac{۱}{۲}r = ۱ \Rightarrow r^۲ + \frac{۱}{۲}r + \frac{۱}{۱۶} = ۱ + \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \left(r + \frac{۱}{۴}\right)^۲ = \frac{۱۷}{۱۶}$$

$$r + \frac{۱}{۴} = \pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۴} \Rightarrow r = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۷}}{۴}$$

۱۰ صفحه ۷۴ **فعالیت**

می‌خواهیم برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ $(a \neq ۰)$ فرمول کلی پیدا کنیم. مراحل زیر را کامل کنید:

$ax^2 + bx + c = ۰$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم: $x^2 + (b/a)x + c/a = ۰ \Rightarrow x^2 + (b/a)x = -c/a$

به دو طرف معادله ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

دو طرف را ساده کرده‌ایم: $(x + b/۲a)^2 = (b^2 - ۴ac)/۴a^2$

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta = b^2 - ۴ac$؛ پس: $(x + b/۲a)^2 = \Delta/۴a^2$. آیا می‌توانید با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به‌دست آورید؟ (گفت‌وگوی دانش‌آموز و معلم دربارهٔ حالت‌های $\Delta > ۰$، $\Delta < ۰$ و $\Delta = ۰$ را نیز کامل کنید.)

مرحله ۱: تقسیم بر a (چون $a \neq ۰$):

$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \Rightarrow x^۲ + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

مرحله ۲: نصف ضریب x برابر $\frac{b}{۲a}$ است؛ پس مربع آن یعنی $\frac{b^۲}{۴a^۲}$ را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} = \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}$$

مرحله ۳: با قراردادن $\Delta = b^۲ - ۴ac$:

$$\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ = \frac{\Delta}{۴a^۲}$$

گفت‌وگو:

- اگر $\Delta < 0$: سمت راست منفی است و مربع هیچ عدد حقیقی منفی نمی‌شود؛ پس معادله **ریشهٔ حقیقی ندارد**.
- اگر $\Delta > 0$: از دو طرف ریشهٔ دوم می‌گیریم: $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (دو ریشهٔ حقیقی متمایز).
- اگر $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$ (یک ریشه که به آن ریشهٔ مضاعف یا ریشهٔ مکرر مرتبهٔ دوم می‌گویند).

۱۱ صفحه ۷۵ — کار در کلاس

۱ با توجه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$؛ $\Delta > 0$، ...، $\Delta = 0$ ⇒ ...، $\Delta < 0$ ⇒ ...

با توجه به رابطهٔ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$:

حالت	نتیجه
$\Delta < 0$	معادله ریشهٔ حقیقی ندارد
$\Delta = 0$	معادله یک ریشهٔ حقیقی (ریشهٔ مضاعف) دارد: $x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$	معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

۱۲ صفحه ۷۵ — کار در کلاس

۲ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$ **ب)** $-2x^2 + x + 3 = 0$ **پ)** $-x^2 + 4x - 4 = 0$

الف) $a = 1,\ b = -1,\ c = 1 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$

چون Δ منفی است، معادله **جواب حقیقی ندارد**.

ب) $a = -2,\ b = 1,\ c = 3 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-2)(3) = 25 > 0$

$x = \frac{-1 \pm 5}{2(-2)} = \frac{-1 \pm 5}{-4} \Rightarrow x = -1$ یا $x = \frac{3}{2}$

پ) $a = -1,\ b = 4,\ c = -4 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-1)(-4) = 0$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

معادله یک ریشهٔ مضاعف $x = ۲$ دارد.

---

۱۳ صفحه ۷۶ — تمرین

۱ معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $۵t^۲ = ۲۰$ **۲)** $x^۲ - ۱۱x = -۱۰$

۳) $۴k^۲ - ۱۲k + ۸ = ۰$ **۴)** $۵a^۲ - ۷a = ۲a(a - ۳)$

۱) $x^۲ - ۱۱x + ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۱۰) = ۰ \Rightarrow x = ۱$ یا $x = ۱۰$

۲) $۵t^۲ - ۲۰ = ۰ \Rightarrow ۵(t - ۲)(t + ۲) = ۰ \Rightarrow t = ۲$ یا $t = -۲$

۳) $۵a^۲ - ۷a = ۲a^۲ - ۶a \Rightarrow ۳a^۲ - a = ۰ \Rightarrow a(۳a - ۱) = ۰ \Rightarrow a = ۰$ یا $a = \frac{۱}{۳}$

۴) دو طرف را بر ۴ تقسیم می‌کنیم: $k^۲ - ۳k + ۲ = ۰ \Rightarrow (k - ۱)(k - ۲) = ۰ \Rightarrow k = ۱$ یا $k = ۲$

---

۱۴ صفحه ۷۶ — تمرین

۲ هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^۲ - ۲ = ۲۶$ **۲)** $x^۲ + ۱۲ = ۳$

۳) $(۳t - ۲)^۲ = ۴$ **۴)** $۳ - ۳k = ۳k(۲k - ۱)$

۱) $n^۲ = ۲۸ \Rightarrow n = \pm\sqrt{۲۸} = \pm۲\sqrt{۷}$

۲) $x^۲ = -۹$؛ مربع هیچ عدد حقیقی منفی نیست، پس **جواب حقیقی ندارد.**

۳) $۳t - ۲ = \pm۲ \Rightarrow ۳t = ۴$ یا $۳t = ۰ \Rightarrow t = \frac{۴}{۳}$ یا $t = ۰$

۴) $۳ - ۳k = ۶k^۲ - ۳k \Rightarrow ۶k^۲ = ۳ \Rightarrow k^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۵ صفحه ۷۶ — تمرین

۳ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^۲ - ۶x = ۷$ **۲)** $s^۲ - ۳s + ۳ = ۰$

۳) $r^۲ + ۴r + ۴ = ۰$ **۴)** $۲a^۲ + ۵a - ۳ = ۰$

۱) $x^۲ - ۶x + ۹ = ۷ + ۹ \Rightarrow (x - ۳)^۲ = ۱۶ \Rightarrow x - ۳ = \pm۴ \Rightarrow x = ۷$ یا $x = -۱$

۲) $s^۲ - ۳s = -۳ \Rightarrow s^۲ - ۳s + \frac{۹}{۴} = -۳ + \frac{۹}{۴} \Rightarrow \left(s - \frac{۳}{۲}\right)^۲ = -\frac{۳}{۴}$

سمت راست منفی است، پس معادله **جواب حقیقی ندارد**.

۳) $(r + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow r = -۲$ (ریشهٔ مضاعف).

۴) $a^۲ + \frac{۵}{۲}a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a^۲ + \frac{۵}{۲}a + \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۳}{۲} + \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \left(a + \frac{۵}{۴}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۱۶}$

$a + \frac{۵}{۴} = \pm\frac{۷}{۴} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$ یا $a = -۳$

---

۱۶ صفحه ۷۷ تمرین

۴ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰$ ۲) $r - r^۲ = ۳$

۳) $a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹$ ۴) $\frac{t^۲}{۳} - \frac{t}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$

۱) $x = \frac{۱۳ \pm ۱۱}{۸} \Rightarrow x = ۳$ یا $x = \frac{۱}{۴}$ $\Delta = ۱۶۹ - ۴۸ = ۱۲۱$

۲) $r^۲ - r + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۱۲ = -۱۱ < ۰$؛ معادله **جواب حقیقی ندارد**.

۳) $a^۲ + ۲\sqrt{۳}a - ۹ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۲ + ۳۶ = ۴۸$، $\sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$

$a = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = \sqrt{۳}$ یا $a = -۳\sqrt{۳}$

۴) دو طرف را در ۶ ضرب می‌کنیم: $۲t^۲ - ۳t - ۹ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ + ۷۲ = ۸۱$

$t = \frac{۳ \pm ۹}{۴} \Rightarrow t = ۳$ یا $t = -\frac{۳}{۲}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۷ صفحه ۷۷ تمرین

۵ هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $۲x^۲ = ۲۵۰$ ۲) $۹ - ۶z + z^۲ = ۰$

۳) $۴a^۲ + ۳a = ۱$ ۴) $b^۲ + \sqrt{۲}b - ۴ = ۰$

۱) $x^۲ = ۱۲۵ \Rightarrow x = \pm۵\sqrt{۵}$

۲) $z^۲ - ۶z + ۹ = ۰ \Rightarrow (z - ۳)^۲ = ۰ \Rightarrow z = ۳$ (ریشهٔ مضاعف).

۳) $۴a^۲ + ۳a - ۱ = ۰ \Rightarrow (۴a - ۱)(a + ۱) = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$ یا $a = -۱$

۴) $\Delta = ۲ + ۱۶ = ۱۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۳\sqrt{۲}$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$b = \frac{-\sqrt{۲} \pm ۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow b = \sqrt{۲}$ یا $b = -۲\sqrt{۲}$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸ صفحه ۷۷ تمرین

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.

دو عدد فرد متوالی را n و n+۲ می‌گیریم:

$n^۲ + (n+۲)^۲ = ۲۹۰ \Rightarrow ۲n^۲ + ۴n + ۴ = ۲۹۰ \Rightarrow n^۲ + ۲n - ۱۴۳ = ۰$

$(n-۱۱)(n+۱۳) = ۰ \Rightarrow n = ۱۱$ یا $n = -۱۳$

بنابراین دو عدد **۱۱ و ۱۳** هستند (یا اگر اعداد منفی هم مجاز باشند: ۱۳- و ۱۱-). آزمایش: $۱۲۱ + ۱۶۹ = ۲۹۰$

---

۱۹ صفحه ۷۷ تمرین

۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

عرض را w می‌گیریم؛ طول $۴w + ۳$ است:

$w(۴w+۳) = ۴۵ \Rightarrow ۴w^۲ + ۳w - ۴۵ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ + ۷۲۰ = ۷۲۹ = ۲۷^۲$

$w = \frac{-۳ \pm ۲۷}{۸} \Rightarrow w = ۳$ یا $w = -\frac{۱۵}{۴}$

عرض نمی‌تواند منفی باشد؛ پس عرض ۳ سانتی‌متر و طول $۴ \times ۳ + ۳ = ۱۵$ سانتی‌متر است. (آزمایش: $۳ \times ۱۵ = ۴۵$)

---

۲۰ صفحه ۷۷ تمرین

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

سن برادر کوچک‌تر را a می‌گیریم؛ سن برادر بزرگ‌تر a+۴ است. چهار سال دیگر سن‌ها a+۴ و a+۸ می‌شود:

$(a+۴)(a+۸) = ۶۰ \Rightarrow a^۲ + ۱۲a - ۲۸ = ۰ \Rightarrow (a+۱۴)(a-۲) = ۰$

سن نمی‌تواند منفی باشد، پس $a = ۲$. سن برادران **۲ سال و ۶ سال** است. (آزمایش: چهار سال بعد ۶ و ۱۰ می‌شوند و $۶ \times ۱۰ = ۶۰$)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ صفحه ۷۷ تمرین

۹ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

فاصلهٔ لبه‌های عکس تا قاب را x می‌نامیم؛ ابعاد قاب $۱۵ + ۲x$ و $۱۰ + ۲x$ است:

$$(۱۰ + ۲x)(۱۵ + ۲x) = ۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x + ۱۵۰ = ۳۰۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲۵x - ۷۵ = ۰$$

$$x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{-۲۵ \pm ۳۵}{۴} \Rightarrow \Delta = ۶۲۵ + ۶۰۰ = ۱۲۲۵ = ۳۵^۲ \text{ یا } x = -۱۵$$

فاصله منفی نیست، پس $x = ۲/۵$ سانتی‌متر. ابعاد قاب: $۱۵ = ۵ + ۱۰$ و $۲۰ = ۵ + ۱۵$؛ یعنی **۱۵ در ۲۰ سانتی‌متر** (مساحت ۳۰۰).

۲۲ صفحه ۷۷ تمرین

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

هر تیم با $n-۱$ تیم دیگر بازی می‌کند، پس $n(n-۱)$ بازی شمرده می‌شود؛ ولی هر بازی دو بار شمرده شده است. بنابراین الگوی تعداد بازی‌ها:

$$N = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

برای $N = ۴۵$:

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۴۵ \Rightarrow n^۲ - n - ۹۰ = ۰ \Rightarrow (n - ۱۰)(n + ۹) = ۰ \Rightarrow n = ۱۰$$

تعداد تیم‌ها **۱۰** است ($n = -۹$ قبول نیست).

۲۳ صفحه ۷۷ تمرین

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطهٔ $P = ۰.۰۰۶s^۲ - ۰.۰۲s + ۱۲۰$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

قرار می‌دهیم $P = ۱۲۵$:

$$۰.۰۰۶s^۲ - ۰.۰۲s + ۱۲۰ = ۱۲۵ \Rightarrow ۰.۰۰۶s^۲ - ۰.۰۲s - ۵ = ۰$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$$\Delta = (-0.02)^2 - 4(0.006)(-5) = 0.0004 + 0.12 = 0.1204$$

$$s = \frac{0.02 \pm \sqrt{0.1204}}{0.012} = \frac{0.02 \pm 0.347}{0.012}$$

جواب منفی (حدود ۲۷/۲۵-) به‌عنوان سن قابل قبول نیست؛ جواب مثبت حدود **۳۰/۶ سال** (تقریباً ۳۱ سال) است.

---

۲۴ صفحه ۷۸ **فعالیت**

معادلهٔ $y = x^2 - 4$ را درنظر بگیرید.

الف) در جدولی چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند آمده است. این جدول را کامل کنید. ($x = -2$، -1، ۰، ۱، ۲)؛ نقاط به‌دست‌آمده را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و به یکدیگر وصل می‌کنیم.

ب) پایین‌ترین نقطهٔ این نمودار چه نقطه‌ای است؟ آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟

پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟

ت) محل برخورد منحنی رسم‌شده با محور xها در چه نقاطی است؟

الف)

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^2 - 4$	۰	-۳	-۴	-۳	۰
(x, y)	(-۲، ۰)	(-۱، -۳)	(۰، -۴)	(۱، -۳)	(۲، ۰)

ب) پایین‌ترین نقطهٔ نمودار **(۰، -۴)** است. نمودار نسبت به خط عمودی گذرنده از این نقطه، یعنی محور yها با معادلهٔ **$x = 0$** متقارن است (مثلاً (۱، -۳) و (-۱، -۳) قرینهٔ هم‌اند).

پ) پنج نقطه استفاده کرده‌ایم. بله، به‌دلیل تقارن می‌توان با نقاط کمتر هم رسم کرد: کافی است رأس و دو یا سه نقطه در یک سمت محور تقارن را به‌دست آوریم و قرینهٔ آن‌ها را بنویسیم.

ت) برای برخورد با محور xها قرار می‌دهیم $y = 0$: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$؛ یعنی نقاط **(-۲، ۰)** و **(۲، ۰)**.

---

۲۵ صفحه ۷۹ **فعالیت**

معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید. $y = (x - 2)^2 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 5 + \dots$

ب) ریشهٔ عبارت داخل پرانتز را به‌دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول ($x = 0$، ۱، ۲، ۳، ۴) قرار دهید.

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. $x - 2 = 0 \Rightarrow \dots$

پ) پنج نقطهٔ حاصل‌شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

ت) آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل $y = (x - ۲)^۲ + ۱$ به‌دست آورید؟

الف) $y = x^۲ - ۴x + ۵ = (x^۲ - ۴x + ۴) + ۱ = (x - ۲)^۲ + ۱$

ب) $x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$؛ پس $x = ۲$ را در وسط جدول قرار می‌دهیم:

x	۰	۱	۲	۳	۴
$x - ۲$	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = (x - ۲)^۲ + ۱$	۵	۲	۱	۲	۵
(x, y)	(۰، ۵)	(۱، ۲)	(۲، ۱)	(۳، ۲)	(۴، ۵)

پ) نمودار با وصل کردن این پنج نقطه رسم می‌شود:

ت) بله. چون $(x - ۲)^۲ \geq ۰$ است، کمترین مقدار y وقتی به‌دست می‌آید که $(x - ۲)^۲ = ۰$ یعنی $x = ۲$؛ آنگاه $y = ۱$. پس پایین‌ترین نقطه **(۲، ۱)** است و محور تقارن $x = ۲$ است.

۲۶ صفحه ۸۰ **کار در کلاس**

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف) $y = (x + ۱)^۲ - ۲$ **ب)** $y = -۲x^۲ + ۱$

الف) سهمی به شکل $y = a(x - h)^۲ + k$ با $a = ۱$ و $-h = ۱$ و $-k = ۲$ است؛ پس رأس **(−۱، −۲)** و خط تقارن $x = -۱$ است. چون $a > ۰$ است، رأس پایین‌ترین نقطه و دهانهٔ سهمی رو به بالاست. نقاط کمکی: (۰، −۱)، (−۲، −۱)، (۱، ۲)، (−۳، ۲).

ب) این سهمی به شکل $y = -۲(x - ۰)^۲ + ۱$ است؛ پس رأس **(۰، ۱)** و خط تقارن $x = ۰$ است. چون $a = -۲ < ۰$ است، رأس بالاترین نقطه و دهانه رو به پایین است. نقاط کمکی: (±۱، −۱) و (±۲، −۷).

۲۷ صفحه ۸۰ **فعالیت**

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^۲ + bx + c$ را در نظر بگیرید.

الف) سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید: $y = a\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$

ب) با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ $\left(-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac - b^۲}{۴a}\right)$ **و خط تقارن آن نیز** $x = -\frac{b}{۲a}$ **است.**

الف) از جمله‌های شامل x ضریب a را فاکتور می‌گیریم و مربع کامل می‌سازیم:

$$y = a\left(x^۲ + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{b^۲}{۴a^۲}\right) + c$$

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ب) این رابطه به شکل $y = a(x - h)^2 + k$ است با $h = -\frac{b}{2a}$ و $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. سهمی به شکل $y = a(x - h)^2 + k$ رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارن $x = h$ دارد (زیرا $(x - h)^2 \geq 0$ و کمترین یا بیشترین مقدار y در $x = h$ رخ می‌دهد). بنابراین رأس سهمی $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ و خط تقارن $x = -\frac{b}{2a}$ است.

۲۸ صفحه ۸۱ فعالیت

معادلهٔ دو سهمی به‌صورت $y = 2x^2 + 1$ و $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ است.

الف) مختصات رأس و دو نقطهٔ دیگر از این دو سهمی را در جدول مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطهٔ $A(0, 1)$ است.

ب) معادلهٔ سهمی دیگری را که نقطهٔ A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

الف) برای هر دو سهمی $-\frac{b}{2a} = 0$ و y در $x = 0$ برابر ۱ است؛ پس رأس هر دو $A(0, 1)$ است.

سهمی	رأس	نقطهٔ دوم	نقطهٔ سوم
$y = 2x^2 + 1$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(-1, 3)$
$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$	$(0, 1)$	$(2, 3)$	$(-2, 3)$

ب) هر معادله به شکل $y = ax^2 + 1$ با $a \neq 0$ رأسی در $A(0, 1)$ دارد؛ مثلاً $y = x^2 + 1$ (خط چین در شکل). با a منفی نیز می‌توان نوشت، مثلاً $y = -x^2 + 1$ که دهانه‌اش رو به پایین است.

۲۹ صفحه ۸۱ تمرین

۱ نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -(x + 1)^2 - 3$ **ب)** $y = 3x^2 - 2$

پ) $y = x^2 - x$ **ت)** $y = \frac{x^2}{4} + x - 2$

سهمی	رأس	خط تقارن	جهت دهانه
الف) $y = -(x+1)^2 - 3$	$(-1, -3)$	$x = -1$	پایین
ب) $y = 3x^2 - 2$	$(0, -2)$	$x = 0$	بالا
پ) $y = x^2 - x$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$	$x = \frac{1}{2}$	بالا
ت) $y = x^2/4 + x - 2$	$(-2, -3)$	$x = -2$	بالا

الف) از شکل مربع کامل، رأس $(-1, -3)$؛ نقاط: $(0, -4)$، $(-2, -4)$، $(1, -7)$، $(-3, -7)$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

ب) رأس (۰، −۲)؛ نقاط: (±۱، ۱)، (±۲، ۱۰) و برخورد با محور x در $x = \pm\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ·

پ) $y_v = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۴}$, $x_v = -\frac{-۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$؛ برخورد با محور x در (۰، ۰) و (۱، ۰)؛ نقاط دیگر: (−۱، ۲) و (۲، ۲).

ت) $y_v = ۱ - ۲ - ۲ = -۳$, $x_v = -\frac{۱}{۲ \cdot \frac{۱}{۴}} = -۲$؛ برخورد با محور y در (۰، −۲) و قرینهٔ آن (−۴، −۲)؛ نقاط: (۲، ۱) و (−۶، ۱).

---

۳۰ صفحه ۸۱ **تمرین**

۲ اگر (−۲، ۵) و (۰، ۵) دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به‌دست آورید.

دو نقطه عرض یکسان دارند، پس نسبت به خط تقارن قرینه‌اند و خط تقارن از وسط آن‌ها می‌گذرد:

$$x = \frac{-۲ + ۰}{۲} = -۱$$

خط تقارن سهمی $x = -۱$ است.

---

۳۱ صفحه ۸۱ **تمرین**

۳ نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاطی به طول ۱− و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

چون محور xها را در ۱− و ۲ قطع کرده، ریشه‌های سهمی ۱− و ۲ هستند: $y = a(x + ۱)(x - ۲)$. محور yها را در عرض ۲ قطع کرده، یعنی به‌ازای $x = ۰$ مقدار $y = ۲$ است:

$$۲ = a(۰ + ۱)(۰ - ۲) = -۲a \Rightarrow a = -۱$$

$$y = -(x + ۱)(x - ۲) = -x^۲ + x + ۲$$

رأس سهمی: $y = \frac{۹}{۴}$, $x = -\frac{۱}{۲(-۱)} = \frac{۱}{۲}$؛ دهانه رو به پایین است.

---

۳۲ صفحه ۸۱ **تمرین**

۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی‌شده از رابطهٔ $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۳}{۲}x + ۲$ به‌دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و مسیر طی‌شده از رابطهٔ $y = -۲x^۲ + ۳x + ۲$ به‌دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی‌شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازهٔ آن‌ها را مشخص کنید.

الف) هر دو سهمی دهانه‌ای رو به پایین دارند و از نقطهٔ (۰، ۲) (ارتفاع اولیه) می‌گذرند. رأس A: $x = \frac{۳}{۲} = \frac{۳/۲}{۲ \cdot ۱/۲}$، $y = \frac{۲۵}{۸}$؛ رأس B: $x = \frac{۳}{۴}$، $y = \frac{۲۵}{۸}$.

ب) برخورد با زمین یعنی $y = ۰$ (فقط $x \geq ۰$ معنا دارد):

$$A: \ -\frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۳}{۲}x + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

$$B: \ -۲x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow (۲x + ۱)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

وزنهٔ A در نقطهٔ (۴، ۰) و وزنهٔ B در نقطهٔ (۲، ۰) به زمین می‌خورد؛ پس **وزنهٔ A مسافت افقی بیشتری (۴ متر در برابر ۲ متر)** طی کرده است.

پ) ارتفاع بیشینهٔ هر دو وزنه برابر $\frac{۲۵}{۸} = ۳.۱۲۵$ متر است؛ یعنی هیچ‌کدام ارتفاع بیشتری پیدا نکرده‌اند و هر دو به **ارتفاع یکسان ۳/۱۲۵ متر** می‌رسند (A در $x = ۱/۵$ و B در $x = ۰/۷۵$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۳۳ صفحه ۸۳ **فعالیت**

۱ نمودار خط $y = ۲x - ۶$ در شکل مقابل رسم شده است. با استفاده از آن، علامت y را در جدول زیر بنویسید.

خط محور xها را در $x = ۳$ قطع می‌کند ($۲x \Rightarrow x = ۳ - ۶ = ۰$). نمودار برای $x < ۳$ زیر محور xها و برای $x > ۳$ بالای آن است:

x	$x < ۳$	$x = ۳$	$x > ۳$
$y = ۲x - ۶$	−	۰	+

۳۴ صفحه ۸۴ **فعالیت**

۲ نمودار خط $y = -۲x + ۶$ را در شکل مقابل رسم کنید و جدول زیر را که علامت y را برای xهای مختلف تعیین می‌کند، کامل کنید.

۳ در دو قسمت بالا علامت عددی که ضریب x است، چه تفاوتی در جدول تعیین علامت این خطوط ایجاد کرده است؟

۴ نشان دهید که علامت عبارت $y = ax + b$، برای xهای مختلف از جدول زیر تعیین می‌شود.

۲) ریشهٔ $-۲x + ۶ = ۰$ برابر $x = ۳$ است. نمودار (شکل سمت راست) برای $x < ۳$ بالای محور xها و برای $x > ۳$ پایین آن است:

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

x	x < ۳	x = ۳	x > ۳
y = −۲x + ۶	+	۰	−

۳) وقتی ضریب x مثبت است (۲)، علامت y بعد از ریشه مثبت و قبل از آن منفی است؛ وقتی ضریب x منفی است (۲−)، علامت‌ها برعکس می‌شود: قبل از ریشه مثبت و بعد از آن منفی.

۴) ریشهٔ $ax+b=0$ برابر $x=-\frac{b}{a}$ است. می‌نویسیم $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$:

x	x < −b/a	x = −b/a	x > −b/a
y = ax+b	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

- اگر $x>-\frac{b}{a}$ باشد، $x+\frac{b}{a}>0$ است؛ پس علامت y همان علامت a است (موافق a).
- اگر $x<-\frac{b}{a}$ باشد، $x+\frac{b}{a}<0$ است؛ پس علامت y مخالف علامت a است.
- در $x=-\frac{b}{a}$ مقدار y برابر صفر است.

۳۵ صفحه ۸۴ **مثال**

مقدار y را برای $x=۳$ و $x=-۱$ برای عبارت $y=۵x-۲$ به‌دست آورید و صحت علامت اعداد به‌دست‌آمده را با جدول بالا بررسی کنید.

ریشه: $۵x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}$ و ضریب x مثبت است (علامت: − قبل از $\frac{۲}{۵}$، + بعد از آن).

$x=۳$: $y=۵(۳)-۲=۱۳>۰$ و چون $۳>\frac{۲}{۵}$ است، علامت مثبت با جدول سازگار است.

$x=-۱$: $y=۵(-۱)-۲=-۷<۰$ و چون $-۱<\frac{۲}{۵}$ است، علامت منفی با جدول سازگار است.

۳۶ صفحه ۸۵ **مثال**

مقدار $A=(۲x-۱)(۳-x)$ را برای $x=۴$ و $x=۰$ به‌دست آورید و صحت علامت مقادیر به‌دست‌آمده را با جدول بررسی کنید.

جدول: A منفی است برای $x<\frac{۱}{۲}$، مثبت است برای $\frac{۱}{۲}<x<۳$ و منفی است برای $x>۳$.

$x=۴$: $A=(۸-۱)(۳-۴)=۷\times(-۱)=-۷<۰$ و $۴>۳$ است؛ علامت منفی با جدول سازگار است.

$x=۰$: $A=(-۱)(۳)=-۳<۰$ و $\frac{۱}{۲}>۰$ است؛ علامت منفی با جدول سازگار است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۳۷ صفحه ۸۵ کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = (3x + 1)(x - 2)$ **ب)** $B = (2x - 3)^2$

پ) $C = 3x(7 - x)$ **ت)** $D = \frac{5 - 2x}{x - 1}$

الف) ریشه‌ها: $x = -\frac{1}{3}$ و $x = 2$.

x	$x < -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} < x < 2$	2	$x > 2$
$3x+1$	−	۰	+	+	+
$x-2$	−	−	−	۰	+
A	+	۰	−	۰	+

ب) $B = (2x - 3)^2 \geq 0$ و فقط در $x = \frac{3}{2}$ صفر است:

x	$x < 3/2$	$3/2$	$x > 3/2$
B	+	۰	+

پ) ریشه‌ها: ۰ و ۷.

x	$x < 0$	۰	$0 < x < 7$	7	$x > 7$
$3x$	−	۰	+	+	+
$x-7$	+	+	+	۰	−
C	−	۰	+	۰	−

ت) صورت ریشهٔ $x = \frac{5}{2}$ و مخرج ریشهٔ $x = 1$ دارد (در $x = 1$ عبارت تعریف نشده است):

x	$x < 1$	1	$1 < x < 5/2$	$5/2$	$x > 5/2$
$5-2x$	+	+	+	۰	−
$x-1$	−	۰	+	+	+
D	−	تعریف‌نشده	+	۰	−

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸ صفحه ۸۶ **فعالیت**

چندجمله‌ای درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ **را درنظر می‌گیریم که در آن** a، b **و** c **اعداد حقیقی‌اند و** $a \neq 0$.

۱ فرض کنید معادلهٔ $P(x) = 0$ **دو ریشهٔ متمایز** x_1 **و** x_2 $(x_1 < x_2)$ **داشته و به شکل** $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ **تجزیه شده باشد. با تکمیل جدول زیر، علامت** $P(x)$ **را برای** x**های مختلف تعیین کنید.**

۲ اگر معادلهٔ $P(x) = 0$ **ریشهٔ مضاعف برابر با** x_1 **داشته باشد، می‌توانیم** $P(x)$ **را به شکل** $P(x) = a(x - x_1)^2$ **بنویسیم. با تکمیل جدول، علامت** $P(x)$ **را تعیین کنید.**

۳ اکنون فرض کنید $\Delta < 0$ **باشد؛ در این صورت معادلهٔ** $P(x) = 0$ **ریشهٔ حقیقی ندارد. با توجه به اینکه** $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$، **علامت** $P(x)$ **را در جدول تعیین کنید.**

۴ با توجه به قسمت بالا، مشخص کنید اگر $P(x)$ **برای هر** $x \in \mathbb{R}$ **مثبت باشد،** a **و** Δ **چه علامتی دارند؟ برای وقتی که** $P(x)$ **منفی است نیز علامت** a **و** Δ **را تعیین کنید.**

۱)

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
$x - x_1$	−	۰	+	+	+
$x - x_2$	−	−	−	۰	+
$(x-x_2)(x-x_1)$	+	۰	−	۰	+
$P(x)$	هم‌علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	هم‌علامت a

۲) $(x - x_1)^2 \geq 0$ است، پس:

x	$x \neq x_1$	$x = x_1$
$(x-x_1)^2$	+	۰
$P(x)$	هم‌علامت a	۰

۳) اگر $\Delta < 0$ باشد، $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ است و داخل کروشه مجموع یک مربع (نامنفی) و یک عدد مثبت است؛ پس همواره مثبت است. بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$، علامت $P(x)$ **هم‌علامت** a است.

۴) اگر $P(x)$ برای همهٔ xها مثبت باشد، باید $a > 0$ **و** $\Delta < 0$ باشد. اگر $P(x)$ برای همهٔ xها منفی باشد، باید $a < 0$ **و** $\Delta < 0$ باشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۹ صفحه ۸۸ کار در کلاس

۱ چندجمله‌ای $y = -x^2 + x + 2$ را با محاسبهٔ ریشه‌ها، در یک جدول تعیین علامت کنید؛ سپس با رسم آن، صحت علامت‌های به‌دست‌آمده در جدول را با نمودار، بررسی کنید.

۲ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = (x^2 - 9)(1 - 3x)$ **ب)** $B = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

۱) $x = -1$ یا $x = 2 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow$

چون $a = -1 < 0$ است، علامت بیرون ریشه‌ها منفی و بین ریشه‌ها مثبت است:

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 2$	2	$x > 2$
y	$-$	0	$+$	0	$-$

نمودار سهمی (دهانه رو به پایین، رأس (۰/۵، ۲/۲۵)) بین ۱- و ۲ بالای محور xها و بیرون این بازه پایین آن است؛ با جدول سازگار است.

۲ الف) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$ و $1 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. ضریب x^2 در $x^2 - 9$ مثبت و ضریب x در $1 - 3x$ منفی است.

x	$x < -3$	-3	$-3 < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 3$	3	$x > 3$
x^2-9	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
A	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

ب) صورت: $-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2 \leq 0$ و فقط در $x = 3$ صفر است. مخرج: $x^2 + x + 3$ با $a = 1 > 0$ و $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$ همیشه مثبت است. پس:

x	$x < 3$	3	$x > 3$
$-x^2+6x-9$	$-$	0	$-$
x^2+x+3	$+$	$+$	$+$
B	$-$	0	$-$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۰ صفحه ۸۹ فعالیت

فرض کنید x متغیری باشد که هم‌زمان در دو نامعادلهٔ زیر صدق می‌کند: $3x - 1 \leq 8$ ، $-2 < 3x - 1$

۱ هر کدام از نامعادله‌های بالا را حل کنید و مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده را روی محور مقابل آن‌ها رسم کنید. به‌خاطر وجود «و» بین دو نامعادله، اشتراک مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده را مشخص و آن را روی محور مقابل رسم کنید.

۲ می‌توانیم دو نامعادلهٔ فوق را ترکیب کنیم و به شکل یک نامعادلهٔ دوگانهٔ $-۲ < ۳x - ۱ \leq ۸$ بنویسیم. از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها استفاده کنید و این نامعادلهٔ دوگانه را حل کنید: به سه طرف ۱+ را اضافه می‌کنیم: ... < ۹ ≥ ۳x؛ هر سه طرف را در ⅓ ضرب می‌کنیم: ... < x ≥ .... جواب را با جوابی که در قسمت بالا به آن رسیده‌اید، مقایسه کنید.

۱)

$$-۲ < ۳x - ۱ \Rightarrow -۱ < ۳x \Rightarrow x > -\frac{۱}{۳} \quad \Rightarrow \left(-\frac{۱}{۳}, +\infty\right)$$

$$۳x - ۱ \leq ۸ \Rightarrow ۳x \leq ۹ \Rightarrow x \leq ۳ \quad \Rightarrow (-\infty, ۳]$$

روی محور: جواب اول نیم‌خطی از ⅓- (با دایرهٔ توخالی) به سمت راست و جواب دوم نیم‌خطی از ۳ (با دایرهٔ توپر) به سمت چپ است. اشتراک آن‌ها بخش مشترک هر دو یعنی پارهٔ بین ⅓- (توخالی) و ۳ (توپر) است:

$$\left(-\frac{۱}{۳}, ۳\right]$$

۲) $-۲ < ۳x - ۱ \leq ۸$

$$-۲ + ۱ < ۳x \leq ۸ + ۱ \Rightarrow -۱ < ۳x \leq ۹ \Rightarrow -\frac{۱}{۳} < x \leq ۳$$

جواب به‌دست‌آمده، همان اشتراک قسمت ۱ یعنی $\left(-\frac{۱}{۳}, ۳\right]$ است؛ هر دو روش یک جواب می‌دهند.

۴۱ صفحه ۹۰ کار در کلاس

حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجهٔ سانتی‌گراد و رابطه‌ای که درجهٔ فارنهایت (F) را به سانتی‌گراد (C) تبدیل می‌کند، به‌صورت $C = \frac{۵(F - ۳۲)}{۹}$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را بر حسب فارنهایت تعیین کنید. (قرار دهید $۱۵ \leq C \leq ۲۵$؛ سپس از رابطهٔ داده‌شده، C را بر حسب F بنویسید و نامعادلهٔ دوگانهٔ به‌دست‌آمده را حل کنید.)

به‌جای C مقدار آن را از رابطه قرار می‌دهیم:

$$۱۵ \leq \frac{۵(F - ۳۲)}{۹} \leq ۲۵$$

همهٔ سه طرف را در ۹ ضرب می‌کنیم و بر ۵ تقسیم می‌کنیم:

$$۲۷ \leq F - ۳۲ \leq ۴۵ \Rightarrow ۵۹ \leq F \leq ۷۷$$

پس حداقل دما **۵۹ درجهٔ فارنهایت** و حداکثر دما **۷۷ درجهٔ فارنهایت** است.

۴۲ صفحه ۹۰ فعالیت

سهمی $y = x^2 - 2x - 3$ را درنظر بگیرید که نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

الف) به کمک نمودار رسم‌شده، برای چه مقادیری از x، نمودار سهمی، پایین محور xهاست؟

ب) جدول تعیین علامت عبارت $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید و مشخص کنید برای چه مقادیری از x، علامت y منفی است؟

پ) نشان دهید که از مجموعه جواب‌های به‌دست‌آمده در هر یک از قسمت‌های الف و ب می‌توان برای حل نامعادلهٔ $x^2 - 2x - 3 < 0$ استفاده کرد.

ریشه‌ها: $x = -1 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ یا $x = 3$؛ رأس: $(1, -4)$.

الف) نمودار برای x بین -1 و ۳ پایین محور xهاست، یعنی $-1 < x < 3$.

ب) چون $a = 1 > 0$ است:

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 3$	۳	$x > 3$
$y = x^2-2x-3$	+	۰	−	۰	+

علامت y فقط برای $-1 < x < 3$ منفی است.

پ) حل نامعادلهٔ $x^2 - 2x - 3 < 0$ یعنی یافتن xهایی که به‌ازای آن‌ها y منفی است، یعنی همان xهایی که نمودار زیر محور xهاست. هر دو روش (نمودار و جدول) به یک جواب می‌رسند: مجموعهٔ جواب $(-1, 3)$ است.

۴۳ صفحه ۹۰ کار در کلاس

هریک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^2 + 3x \geq 4$ **ب)** $x^2 - x - 2 \leq 0$

الف) $x^2 + 3x - 4 \geq 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) \geq 0$؛ ریشه‌ها -4 و ۱.

جدول: $a = 1 > 0$ است؛ علامت عبارت برای $x < -4$ مثبت، بین -4 و ۱ منفی و برای $x > 1$ مثبت است.

هندسی: سهمی دهانه رو به بالا دارد و محور xها را در -4 و ۱ قطع می‌کند؛ بخش‌هایی که بالای محور یا روی آن‌اند: بیرون ریشه‌ها.

$$x \leq -4 \text{ یا } x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$$

ب) $(x-2)(x+1) \leq 0$؛ ریشه‌ها -1 و ۲. علامت: بیرون ریشه‌ها مثبت و بین آن‌ها منفی است. سهمی (دهانه رو به بالا) بین ریشه‌ها زیر محور x است:

$$-1 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad [-1, 2]$$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۴ صفحه ۹۱ **فعالیت**

۱ نامعادلهٔ $|x| \leq ۳$ را درنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور نمایش دهید. مجموعهٔ مقادیری را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به‌صورت بازه بنویسید.

۲ نامعادلهٔ $|x| \geq ۳$ را درنظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله شامل اعداد حقیقی x است که فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشند. این اعداد را روی محور نشان دهید و مجموعهٔ این مقادیر را به‌صورت بازه بنویسید.

۳ با استفاده از مراحل بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. $|x| \leq ۳ \Rightarrow \ldots \leq x \leq \ldots$ ⇒ مجموعه جواب (به شکل بازه) = ...؛ $|x| \geq ۳ \Rightarrow \ldots \geq x \geq \ldots$ یا $x \leq \ldots$ ⇒ مجموعه جواب (به شکل بازه) = ...

۱) اعدادی که فاصله‌شان از صفر حداکثر ۳ است، از ۳- تا ۳ هستند (با دایره‌های توپر روی ۳- و ۳ و پاره‌خط بین آن‌ها):

$[-۳, ۳]$

۲) اعدادی که فاصله‌شان از صفر حداقل ۳ است، در سمت راست ۳ (شامل ۳) یا سمت چپ ۳- (شامل ۳-) قرار دارند (دو نیم‌خط با دایره‌های توپر در ۳- و ۳):

$(-\infty, -۳] \cup [۳, +\infty)$

۳)

$|x| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳ \Rightarrow [-۳, ۳]$

$|x| \geq ۳ \Rightarrow x \leq -۳$ یا $x \geq ۳ \Rightarrow (-\infty, -۳] \cup [۳, +\infty)$

۴۵ صفحه ۹۳ **کار در کلاس**

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به‌دست آورید؛ سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left|\frac{۲x+۱}{۳}\right| < ۳$ **ب)** $۲|x| - ۵ \leq ۱$

الف) $-۳ < \frac{۲x+۱}{۳} < ۳ \Rightarrow -۹ < ۲x + ۱ < ۹ \Rightarrow -۱۰ < ۲x < ۸ \Rightarrow -۵ < x < ۴$

$(-۵, ۴)$

روی محور: پاره‌خطی بین ۵- و ۴ با دایره‌های توخالی در دو سر.

ب) $-3 \le x \le 3 \Rightarrow |x| \le 3 \Rightarrow 2|x| \le 6$

$[-3, 3]$

روی محور: پاره‌خطی بین -3 و 3 با دایره‌های توپر در دو سر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۶ صفحه ۹۳ — کار در کلاس

۲ یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازهٔ (۱، ۹) باشد.

وسط بازهٔ (۱، ۹) عدد ۵ و فاصلهٔ آن تا دو سر، ۴ است؛ یعنی x باید از ۵ کمتر از ۴ فاصله داشته باشد:

$$|x - 5| < 4$$

بررسی: $1 < x < 9 \Rightarrow -4 < x - 5 < 4$ ✓

---

۴۷ صفحه ۹۳ — کار در کلاس

۳ یک نامعادلهٔ قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, -6] \cup [3, +\infty)$ باشد.

نقطهٔ وسط -6 و 3 برابر $-\frac{3}{2}$ است و فاصلهٔ آن تا هر دو سر $\frac{9}{2}$ است. جواب شامل نقاطی است که فاصله‌شان از $-\frac{3}{2}$ حداقل $\frac{9}{2}$ باشد:

$$|2x + 3| \ge 9 \iff \left|x + \frac{3}{2}\right| \ge \frac{9}{2}$$

بررسی: $x \ge 3 \Rightarrow 2x + 3 \ge 9$ یا $x \le -6 \Rightarrow 2x + 3 \le -9$ ✓

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۸ صفحه ۹۳ — تمرین

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $-3 \le 2x - 3 < 1$ **ب)** $1 + x \ge x - 5 > 3x + 2$

پ) $|7 - 2x| < 1$ **ت)** $\frac{4 - 2x}{3x + 1} \ge 0$

ث) $x(x^2 + 4) > 0$ **ج)** $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - x + 3} \le 0$

چ) $-5 < x - 2 < 0$ **ح)** $\frac{1 - 3x}{2} \le \frac{x - 1}{2}$

الف) $-3 \le x < 2 \Rightarrow -6 < 2x \le 4 \Rightarrow -3 < 2x - 3 \le 1 \Rightarrow$ $(2, 3]$

ب) دو نامعادله هم‌زمان برقرارند: $3x + 2 > 5 - x \Rightarrow 4x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$ و $x \le 2 \Rightarrow 4 \ge 2x \Rightarrow 5 - x \ge x + 1$. اشتراک: $\left(\frac{3}{4}, 2\right]$

پ) $(3, 4) \Rightarrow 3 < x < 4 \Rightarrow -6 < -2x < -8 \Rightarrow -1 < 7 - 2x < 1$

ت) ریشهٔ صورت $x = 2$ و ریشهٔ مخرج $x = -\frac{1}{3}$ است. علامت کسر: برای $x < -\frac{1}{3}$ منفی، برای $-\frac{1}{3} < x < 2$ مثبت و برای $x > 2$ منفی؛ در $x = 2$ صفر و در $x = -\frac{1}{3}$ تعریف‌نشده است:

$$\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$$

ث) چون $x^2 + 4 > 0$ برای هر x است، علامت حاصل‌ضرب همان علامت x است: $x > 0 \Rightarrow (0, +\infty)$

ج) مخرج $x^2 - x + 3$ دارای $\Delta = 1 - 12 < 0$ و $a > 0$ است، پس همیشه مثبت است؛ علامت کسر همان علامت صورت است: $x^2 - 2x = x(x - 2) \le 0 \Rightarrow 0 \le x \le 2 \Rightarrow [0, 2]$

چ) $(-3, 2) \Rightarrow -3 < x < 2 \Rightarrow -5 < x - 2 < 0$

ح) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 4x \le 2 \Rightarrow x - 1 \le 1 - 3x$

توجه: متن بعضی نامعادله‌ها (به‌ویژه ت، چ و ح) در فایل منبع ناخوانا بوده و از روی نشانه‌های باقی‌مانده بازسازی شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۴۹ صفحه ۹۳ تمرین

۲ به ازای چه مقادیری از k، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

عبارت درجه دوم با $a = 1 > 0$ وقتی همواره مثبت است که $\Delta < 0$ باشد:

$$\Delta = 3^2 - 4(1)(k) = 9 - 4k < 0 \Rightarrow k > \frac{9}{4}$$

پس به‌ازای $k > \frac{9}{4}$ عبارت همواره مثبت است.

---

۵۰ صفحه ۹۳ تمرین

۳ به ازای چه مقادیری از m، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور xهاست؟

سهمی همواره پایین محور xهاست یعنی y برای هر x منفی است؛ پس باید $a = m < 0$ و $\Delta < 0$ باشد:

$$\Delta = (-m)^2 - 4(m)(-1) = m^2 + 4m = m(m + 4) < 0 \Rightarrow -4 < m < 0$$

این جواب با شرط $m < 0$ سازگار است؛ پس $-4 < m < 0$، یعنی $m \in (-4, 0)$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۵۱ صفحه ۹۳ تمرین

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h = -۵t^۲ + ۱۸t + ۱۳$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

باید $h > ۱۳$ باشد:

$$-۵t^۲ + ۱۸t + ۱۳ > ۱۳ \Rightarrow -۵t^۲ + ۱۸t > ۰ \Rightarrow t(۱۸ - ۵t) > ۰$$

ریشه‌ها: $t = ۰$ و $t = ۳/۶$. چون ضریب $t^۲$ منفی است، عبارت بین ریشه‌ها مثبت است:

$$۰ < t < \frac{۱۸}{۵} = ۳.۶$$

یعنی از لحظهٔ پرتاب تا **۳/۶ ثانیه** بعد، ارتفاع جسم بیشتر از ۱۳ متر است. (جسم حدود ۴/۲ ثانیه بعد به زمین می‌رسد.)

---

۵۲ صفحه ۹۳ تمرین

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y = \frac{۱۵}{۸}x^۲ - ۳۰x + ۲۰۰$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به‌دست‌آمده قابل قبول‌اند؟

باید $y > ۱۱۰$ باشد:

$$\frac{۱۵}{۸}x^۲ - ۳۰x + ۲۰۰ > ۱۱۰ \Rightarrow \frac{۱۵}{۸}x^۲ - ۳۰x + ۹۰ > ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۶x + ۴۸ > ۰$$

$$(x - ۴)(x - ۱۲) > ۰ \Rightarrow x < ۴ \text{ یا } x > ۱۲$$

چون x زمان است، $x \geq ۰$؛ پس ضربان قلب در $۰ \leq x < ۴$ و $x > ۱۲$ دقیقه بیشتر از ۱۱۰ است.

قابل قبول بودن: ضربان در لحظهٔ $x = ۰$ برابر ۲۰۰ است، کاهش می‌یابد و در $x = ۸$ به کمترین مقدار (۸۰) می‌رسد. جواب $۰ \leq x < ۴$ منطقی است؛ ولی $x > ۱۲$ قابل قبول نیست، زیرا در واقعیت پس از استراحت، ضربان قلب به حالت عادی برمی‌گردد و دوباره بالا نمی‌رود (مدل فقط برای مدت کوتاه پس از ورزش معتبر است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت